

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

Im Folgenden seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene (und hoffentlich nicht leere) Menge sowie $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion, d. h. für jedes $z_0 \in U$ existiert der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Wir gehen immer davon aus, dass der Definitionsbereich U nicht künstlich eingeschränkt ist, sondern dass es sich also um einen „maximalen“ Definitionsbereich handelt. Wir nennen f holomorph, wenn f in jedem Punkt aus U komplex differenzierbar ist.

Wegen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ können wir f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen. Wir setzen also $f(z) = (u(x, y), v(x, y))^T$ mit $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Ist also f komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, so ist $(u, v)^T$ total differenzierbar in $(x_0, y_0)^T$, und es gilt

$$f'(z_0) \cong \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ferner erhält man durch Wahl zweier Wege in der Konvergenz $z \rightarrow z_0$, dass f die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD)

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

erfüllt. Gelten andersherum die CRD für u und v und sind die partiellen Ableitungen von u und v stetig, so ist $f = u + iv$ holomorph.

Die holomorphe Funktion f kann lokal als Potenzreihe dargestellt werden, d. h. zu jedem $z_0 \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von z_0 in U , so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in V$$

mit geeigneten (natürlich von z_0 abhängenden) Koeffizienten c_k . Aufgrund dieser Darstellbarkeits-Eigenschaft nennt man f analytisch. Der Konvergenzradius r der Reihe ist genau $r = \operatorname{dist}(z_0, \partial U) > 0$. Die Umgebung V kann also als $V = \mathcal{U}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ gewählt werden. Wir vereinbaren $\mathcal{U}_{\infty}(z_0) = \mathbb{C}$; in diesem Fall heißt f eine ganze Funktion, sie ist also komplex differenzierbar auf ganz \mathbb{C} .

Die Konvergenz der Potenzreihe ist absolut gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathcal{U}_r(z_0)$. Daher kann sie gliedweise differenziert werden, die differenzierte Reihe hat denselben Konvergenzradius, und damit ist f beliebig oft differenzierbar auf U . Durch m -maliges Differenzieren und Einsetzen von $z = z_0$ erhalten wir

$$f^{(m)}(z_0) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k k(k-1) \cdots (k-m+1) (z - z_0)^{k-m} \Big|_{z=z_0} = m! c_m,$$

d. h. die Koeffizienten c_m sind genau die Ausdrücke $f^{(m)}(z_0)/m!$ aus der Taylorformel.

Man beachte, dass all diese Folgerungen für reelle Funktionen falsch sind. Es gibt im Reellen differenzierbare Funktionen, die nicht stetig differenzierbar sind, stetig differenzierbare, die nicht zweimal differenzierbar sind, usw. Ferner kann es passieren, dass die Potenzreihenentwicklung einer beliebig oft differenzierbaren Funktion Konvergenzradius 0 besitzt. Oder

die Potenzreihe konvergiert auf einem offenen Intervall, aber nicht zwangsläufig gegen die ursprüngliche Funktion. Reelle Funktionen, die sich tatsächlich lokal in Potenzreihen entwickeln lassen, nennt man reell-analytisch. Wir betrachten im Folgenden einige starke Aussagen, die für reelle Funktionen alle falsch sind.

Zuerst der Identitätssatz: Seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_M = g|_M$ für eine Menge $M \subseteq U$, die einen Häufungspunkt besitzt, der in U liegt. Dann gilt bereits $f = g$, sofern U zusammenhängend ist. Dass zusammenhängend notwendig ist, ist klar; ansonsten betrachte zwei verschiedene lokal konstante Funktionen. Ein Gegenbeispiel für den Fall, dass der Häufungspunkt außerhalb von U liegt, ist $U = \dot{U}_1(0)$, $f(z) = \sin(1/z)$ und $g(z) = 0$. Dann gilt $f|_M = g|_M$ für $M = \{1/n\pi \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U$, aber der einzige Häufungspunkt 0 von M liegt nicht in U . Eine weitere Aussage des Identitätssatzes ist: Gibt es ein $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist f die Nullfunktion, sofern U zusammenhängend ist.

Der zweite Satz ist die Gebietstreue: Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(U)$ ebenfalls offen in \mathbb{C} . Ist zusätzlich U zusammenhängend, d. h. ein Gebiet, so ist auch $f(U)$ zusammenhängend, also ein Gebiet. Dieser Zusatz ist trivial, denn er gilt bereits ganz allgemein für stetige Funktionen zwischen topologischen Räumen.

Ferner gilt das Maximumsprinzip: Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und hat $|f|: U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Maximum in $z_0 \in U$, so ist f (lokal) konstant; konstant dann, wenn U zusammenhängend ist. Ist also andersherum f nicht (lokal) konstant, so hat $\{|f(z)| \mid z \in U\} \subset \mathbb{R}$ kein Maximum. Ist zusätzlich U beschränkt und kann f stetig auf den Abschluss \bar{U} fortgesetzt werden, so nimmt die Fortsetzung ihr Betragsmaximum auf ∂U an. Das ist klar, weil \bar{U} als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von \mathbb{C} kompakt ist, stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Maximum haben und das Maximum nicht im Innern liegen kann.

Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ heißt eine isolierte Singularität von f , falls es eine offene Umgebung V von z_0 mit $V \setminus \{z_0\} \subseteq U$ gibt. Die Singularität heißt hebbar, falls es eine holomorphe Fortsetzung \tilde{f} von f auf $\tilde{U} = U \cup \{z_0\}$ gibt, d. h. eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_U = f$. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =: \tilde{f}(z_0) \in \mathbb{C}$$

als komplexe Zahl existiert. Die Singularität heißt ein Pol, falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

und sie heißt wesentlich in allen anderen Fällen.

Die Entwicklung einer Funktion in einer hebbaren Singularität z_0 ist uninteressant, da diese Entwicklung dieselbe ist, wie wenn man die in z_0 holomorph fortgesetzte Funktion in eine Potenzreihe entwickelt. Ist aber z_0 ein Pol oder eine wesentliche Singularität, so kann f um z_0 als Laurentreihe dargestellt werden, d. h. es gibt eine offene Umgebung V von z_0 mit $V \setminus \{z_0\} \subseteq U$, so dass

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$$

mit geeigneten (natürlich von z_0 abhängenden) Koeffizienten c_k . Die Summanden für $k \geq 0$ bezeichnet man als den Potenzreihenanteil, die Summanden für $k < 0$ als den Hauptteil.

Definiert man analog $r = \text{dist}(z_0, \partial \tilde{U})$ mit $\tilde{U} = U \cup \{z_0\}$, so konvergiert die Laurentreihe auf der punktierten Kreisscheibe $\mathcal{U}_r(z_0) = \mathcal{U}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Die Laurentreihe konvergiert also in einem offenen Ringgebiet mit Innenradius 0 und Außenradius r , und auch sie konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathcal{U}_r(z_0)$.

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

Am Hauptteil lässt sich auch die Art der Singularität ablesen: f hat in z_0 eine hebbare Singularität, wenn der Hauptteil verschwindet; dann ist die Laurentreihe eine Potenzreihe, und diesen Fall wollten wir nicht betrachten. Verschwindet der Hauptteil hingegen nicht und besteht aus endlich vielen Summanden, dann besitzt f einen Pol in z_0 . Es gibt dann genau ein $m \in \mathbb{N}$, so dass die Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

hebbbar in z_0 ist und ihre Fortsetzung \tilde{g} die Bedingung $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ erfüllt. Anders ausgedrückt:

$$m = \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \text{ existiert} \right\}.$$

z_0 heißt dann Pol m -ter Ordnung. Enthält der Hauptteil hingegen unendlich viele Summanden, so ist die Singularität wesentlich.

Man kann sich nun fragen, ob es möglich ist, f in eine Reihe um z_0 zu entwickeln, die „weiter weg“ von z_0 konvergiert. Die Konvergenzgebiete der bisherigen Potenz- und Laurentreihen haben ja immer den Punkt z_0 zumindest berührt. Die Antwort ist ja, und es gilt folgendes: Sei entweder $z_0 \in U$ oder z_0 eine nicht hebbare Singularität von f . Ferner sei $\zeta \in U$ ($\zeta \neq z_0$) beliebig mit der Bedingung, dass es keine nicht hebbare Singularität von f mit demselben Abstand zu z_0 gibt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Laurentreihe von f um z_0 , die im Punkt ζ konvergiert, es gibt also Koeffizienten c_k , so dass

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in V,$$

wobei $\zeta \in V$.

Auch diese Laurentreihe konvergiert auf einem offenen Ringgebiet $\mathcal{U}_{r_i, r_a}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_i < |z - z_0| < r_a\}$ mit den Radien

$$r_i = \max \left\{ |z - z_0| \mid z \text{ ist eine nicht hebbare Singularität von } f \text{ mit } |z - z_0| < r \right\},$$

$$r_a = \min \left\{ |z - z_0| \mid z \text{ ist eine nicht hebbare Singularität von } f \text{ mit } |z - z_0| > r \right\},$$

wobei $r = |\zeta - z_0|$. Dies schaut komplizierter aus als es ist: Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist f in $\mathcal{U}_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}(z_0) \subseteq U$ holomorph; dies ist ein dünner Kreisring um z_0 , der ζ enthält. Dieser Kreisring wird nun nach innen und außen aufgeblasen, bis der Rand an eine nicht hebbare Singularität stößt. Dadurch entsteht automatisch $\mathcal{U}_{r_i, r_a}(z_0)$.

Wir betrachten nun das denkbar einfachste Beispiel, nämlich $f(z) = 1/z$. Offenbar ist der maximale Definitionsbereich $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d. h. f ist eine holomorphe Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$. Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine isolierte Singularität, denn beispielsweise ist $\mathcal{U}_1(0)$ eine offene Umgebung von 0 mit $\dot{\mathcal{U}}_1(0) \subseteq U$. Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{z} \right| = \infty,$$

d. h. 0 ist ein Pol von f . Weiterhin ist $(z - z_0)^1 f(z) = 1$ hebbbar in z_0 mit dem Wert 1, d. h. es liegt ein Pol erster Ordnung vor.

Als erstes wollen wir f um ein $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln. Wir wählen zunächst speziell $z_0 = -3$, um die Rechnung zu verstehen. Wir rechnen also

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{3 - (z + 3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z+3}{3}}.$$

Nun haben wir gewonnen: Es ist ein Ausdruck der Form $1/(1-q)$ entstanden, worin q den Term $z - z_0 = z + 3$ enthält. Die geometrische Reihe liefert sofort

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+3}{3}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k-1}(z+3)^k.$$

Die Theorie sagt, dass der Konvergenzradius $|3 - z_0| = 3$ (Abstand Entwicklungspunkt zur nächsten Singularität) sein muss. Die Bedingung $|q| < 1$ der geometrischen Reihe liefert $|\frac{z+3}{3}| < 1$, also $|z - z_0| < 3$. Mit der Formel von Cauchy-Hadamard folgt

$$r = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{3^{-k-1}}} = \frac{3}{\limsup_k 3^{-1/k}} = 3,$$

also wieder dasselbe Ergebnis.

Für einen allgemeinen Entwicklungspunkt müssen wir $z - z_0$ erzwingen. Wir rechnen also

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{-z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z_0^{-k-1} (z - z_0)^k.$$

Alle drei Betrachtungen ergeben sofort, dass der Konvergenzradius $r = |z_0|$ ist. Wegen $0 \notin U$ kann f natürlich nicht in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden, aber sehr wohl in eine Laurentreihe. Das ist allerdings eher unspannend, da f bereits in der Form $\sum_k c_k (z - 0)^k$ vorliegt, nämlich $c_{-1} = 1$ und $c_k = 0$ für $k \neq -1$.

Interessanter ist es, f in eine Laurentreihe um $z_0 \neq 0$ zu entwickeln. Diese Reihe wird dann außerhalb von $\mathcal{U}_{|z_0|}(z_0)$ konvergieren, genauer also in $\mathcal{U}_{r,\infty}(z_0) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}_r(z_0)}$ mit $r = |z_0|$. Wir wählen wieder $z_0 = -3$. Wir müssen f auf $1/(1-q)$ umschreiben, so dass $1/(z+3)$ in q auftritt. Dazu rechnen wir

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+3} \frac{1}{\frac{z}{z+3}} = \frac{1}{z+3} \frac{1}{1 - \frac{3}{z+3}} = \frac{1}{z+3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z+3}\right)^\ell = \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{-k-1} (z+3)^k.$$

Achtung: Der Hauptteil enthält unendlich viele Summanden, obwohl f natürlich nirgends eine wesentliche Singularität besitzt! Diese Charakterisierung ist nur gültig, wenn f in eine Reihe um z_0 entwickelt wird, die auch auf $\dot{\mathcal{U}}_\varepsilon(z_0)$ für ein $\varepsilon > 0$ konvergiert.

Die Rechnung für allgemeines $z_0 \in U$ lautet

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{\frac{z}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{-z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{-z_0}{z - z_0}\right)^\ell = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-z_0)^{-k-1} (z - z_0)^k.$$

Wir haben die geometrische Reihe auf $q = -z_0/(z - z_0)$ angewandt. Die Bedingung $|q| < 1$ liefert $|z - z_0| > |z_0|$, also genau den gewünschten Bereich. Selbstverständlich liefert das Quotientenkriterium für die ℓ -Reihe dasselbe.

Wichtig ist die folgende Erkenntnis, die der Bedingung an ζ im allgemeinen Satz zuvor entspricht: Es gibt keine Reihenentwicklung von f um $z_0 \neq 0$, die in einem $\zeta \in \partial \mathcal{U}_{|z_0|}(z_0)$ konvergiert. Speziell für $z_0 = -3$: f kann nicht derart um -3 in eine Reihe entwickelt werden, so dass diese in $\zeta = -6$ konvergiert. Die Singularität in 0 hat nämlich von $z_0 = -3$ denselben Abstand wie $\zeta = -6$ von z_0 .

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

Wir betrachten wieder ein allgemeines f und wollen die Koeffizienten c_k noch anders berechnen. Dazu sei

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in \mathcal{U}_{r_i, r_a}(z_0)$$

eine Laurentreihenentwicklung von f auf dem angegebenen Kreisring. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(z - z_0)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, und integrieren entlang $\partial\mathcal{U}_r(z_0)$ mit $r_i < r < r_a$, d. h.

$$\int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} (z - z_0)^m f(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} (z - z_0)^{k+m} dz,$$

wobei wir die Integration mit der Reihe wegen deren gleichmäßiger Konvergenz vertauscht haben. Die Integrale auf der rechten Seite können explizit berechnet werden:

Wir parametrisieren die Kreislinie $\partial\mathcal{U}_r(z_0)$ durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so dass

$$\int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} (z - z_0)^\ell dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^\ell i r e^{it} dt = i r^{\ell+1} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } \ell = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral ist also nur dann von 0 verschieden, falls $k + m = -1$, also $k = -m - 1$ ist. Damit erhalten wir

$$\int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} (z - z_0)^m f(z) dz = 2\pi i c_{-m-1} \implies c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Daraus gewinnt man eine Darstellung für die Ableitungen von f : Ist nämlich $z_0 \in U$, so folgt zusammen mit der Erkenntnis $c_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ für Potenzreihen von zuvor sofort

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{U}_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Diese Darstellung der c_k ist zum Berechnen nicht besonders hilfreich, weil selbst für $f(z) = 1/z$ ein kompliziertes Wegintegral auszurechnen ist. Allerdings erhält man die Abschätzung

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^k},$$

wobei M das Maximum der stetigen Funktion f auf der kompakten Menge $\partial\mathcal{U}_r(z_0)$ ist. Diese Abschätzung liefert sofort den Beweis für den Satz von Liouville: Ist nämlich $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so kann f z. B. um $z_0 = 0$ in eine auf ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihe entwickelt werden. Ist f beschränkt in \mathbb{C} , d. h. kann die Schranke M unabhängig von r gewählt werden, dann gilt $|c_k| < \varepsilon$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$, weil man r beliebig groß wählen kann. Damit folgt $c_1 = c_2 = \dots = 0$, also $f(z) \equiv c_0$, d. h. f ist konstant.

Wenn sich auch diese Darstellung der c_k nicht zu deren Berechnung eignet, eignet sich andersherum das c_k dazu, das Wegintegral auszurechnen. Wir nehmen nun an, dass f in z_0 eine Singularität hat und dass $\overline{\mathcal{U}_r(z_0)} \setminus \{z_0\} \subseteq U$ für $r > 0$. Dann gilt nach der obigen Formel für $k = -1$

$$\int_{\partial\mathcal{U}_r(z_0)} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Darin ist c_{-1} der entsprechende Koeffizient der Laurentreihe von f um z_0 , die auf $\overline{\mathcal{U}_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ konvergiert. Diesen Koeffizienten nennen wir das Residuum $c_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ von f in z_0 .

Bevor wir den Residuensatz betrachten wollen, definieren wir allgemeinere Integrationswege als Kreislinien. Unter einem Weg verstehen wir eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. das Bild (als Teilmenge von \mathbb{C}) von dieser Parametrisierung. Wir sprechen von einem Weg in U , falls $\text{Bild } \gamma \subseteq U$. γ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$. γ heißt ein Jordan-Weg, falls $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{]a,b]}$ injektiv sind. Ein geschlossener Jordan-Weg γ zerlegt $\mathbb{C} \setminus \text{Bild } \gamma$ in ein beschränktes Inneres und ein unbeschränktes Äußeres. Wir nennen ihn positiv orientiert, wenn das Innere stets links liegt. Wir kürzen im Folgenden „positiv orientierter geschlossener Jordan-Weg“ durch „positiver Weg“ ab.

Seien nun U wie üblich und γ_1, γ_2 zwei geschlossene Wege in U . Beide seien o. B. d. A. über $[a, b]$ definiert, was durch Transformation der Parametrisierung erreicht werden kann. γ_2 heißt homotop zu γ_1 , geschrieben $\gamma_2 \sim \gamma_1$, wenn es eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_2 gibt, d. h. eine stetige Abbildung $h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ mit $h(t, 0) = \gamma_1(t)$ und $h(t, 1) = \gamma_2(t)$. Das bedeutet, dass γ_1 stetig in γ_2 deformiert werden kann, ohne dabei die Menge U zu verlassen. Ein geschlossener Weg heißt nullhomotop, falls er homotop zum Punkt-Weg $\{z_0\}$ ist.

Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geschlossenen Wege in U . Durch Herausteilen entsteht die sogenannte erste Fundamentalgruppe von U . Ist diese trivial, d. h. besteht sie nur aus einem Element, dann sind je zwei geschlossene Wege homotop, insbesondere sind alle geschlossenen Wege nullhomotop. Jeder geschlossene Weg in U kann also stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden. Dies bezeichnet man als einfach zusammenhängend, anschaulich haben solche Mengen keine Löcher.

Seien nun wieder U und f wie üblich. Das Wegintegral ist Homotopie-invariant, d. h. sind γ_1 und γ_2 zueinander homotope Wege in U , so gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Ist γ nullhomotop in U , so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dies ist der Cauchysche Integralsatz. Ist U einfach zusammenhängend, so gilt dies also für jeden geschlossenen Weg γ .

Seien U einfach zusammenhängend, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg und $a < t_0 < b$. Dann zerfällt γ in einen Weg $\gamma_1 = \gamma|_{[a,t_0]}$ („Hinweg“) und einen Weg $\gamma_2 = \gamma|_{[t_0,b]}$ („Rückweg“). Dann haben γ_1 und $-\gamma_2$ (rückwärts durchlaufener γ_2) denselben Anfangs- und Endpunkt, nämlich $\gamma(a)$ ($= \gamma(b)$) und $\gamma(t_0)$, und es gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-\gamma_2} f(z) dz.$$

Daraus folgt: Das Wegintegral ist wegunabhängig, d. h. es hängt ausschließlich vom Anfangspunkt und Endpunkt ab. Dies rechtfertigt die dadurch wohldefinierte Schreibweise

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

für beliebige $z_1, z_2 \in U$, und es kann klarerweise berechnet werden, indem entlang eines beliebigen Weges von z_1 nach z_2 in U integriert wird.

Aber es gilt viel mehr: Für ein beliebiges festes $z_0 \in U$ wird durch

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

eine komplex differenzierbare Stammfunktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert, und es gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$. Ist U nicht einfach zusammenhängend, so muss man zumindest sicherstellen, dass f auf eine einfach zusammenhängende Teilmenge $\tilde{U} \subset U$ eingeschränkt werden kann, so dass der betrachtete Weg noch in \tilde{U} liegt. Dann gilt einfach

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Das Standardgegenbeispiel haben wir schon gerechnet, nämlich

$$\int_{\partial\mathcal{U}_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Wenn es eine einfach zusammenhängende Menge U als Definitionsbereich für f gäbe, so dass $\partial\mathcal{U}_1(0) \subset U$, dann wäre dieses geschlossene Integral 0. Daher besitzt $f(z) = 1/z$ keine Stammfunktion in einer Umgebung um die 0. Schneidet man hingegen ein Stück aus der Kreislinie heraus (wonach der Integrationsweg natürlich nicht mehr geschlossen ist), so ist das Integral natürlich nicht plötzlich 0, kann aber mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden. Dazu betrachten wir $\gamma(t) = re^{i(\varphi+t)}$ für $t \in [\varepsilon - \pi, \pi - \varepsilon]$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ beliebig und $\varepsilon > 0$ klein. Wir schneiden also „gegenüber“ von φ ein Winkelstück der Größe 2ε heraus. Dann ist $f(z) = 1/z$ holomorph auf $U = \mathbb{C} \setminus \{se^{i\varphi} \mid s \leq 0\}$, und es gilt $\text{Bild } \gamma \subset U$. Diese geschlitzte Ebene U ist aber einfach zusammenhängend, d. h. f besitzt auf U eine Stammfunktion, z. B.

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta, \quad z_0 = e^{i\varphi} \in U.$$

Wir wollen diese Stammfunktion explizit ausrechnen. Da $z \neq 0$ ist, können wir

$$F(z) = \int_{e^{i\varphi}}^{z/|z|} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{z/|z|}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

schreiben. Es sei ψ das Argument von z derart, dass $|\psi - \varphi| < \pi$ ist. Im ersten Integral liegen Anfangs- und Endpunkt auf dem Einheitskreis, wir wählen also einen Kreisbogen als Weg, genauer $\zeta = e^{it}$, $t_1 = \varphi$ und $t_2 = \psi$. Im zweiten Integral haben Anfangs- und Endpunkt denselben Winkel, wir wählen also eine radiale Strecke als Weg, genauer $\zeta = te^{i\psi}$, $t_1 = 1$ und $t_2 = |z|$. Damit folgt

$$F(z) = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt + \int_1^{|z|} \frac{1}{te^{i\psi}} e^{i\psi} dt, \quad z = |z|e^{i\psi}.$$

Dies sind gewöhnliche Riemann-Integrale. Ausrechnen ergibt

$$F(z) = i(\psi - \varphi) + \ln |z|.$$

F ist ein komplexer Logarithmus zum Winkel φ . Für $\varphi = 0$ ergibt sich der Hauptzweig zu

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0], \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Mit dem obigen F zum Winkel φ rechnen wir noch schnell das Wegintegral aus:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= F(\gamma(\pi - \varepsilon)) - F(\gamma(\varepsilon - \pi)) = F(re^{i(\varphi+\pi-\varepsilon)}) - F(re^{i(\varphi+\varepsilon-\pi)}) \\ &= \ln r + i(\varphi + \pi - \varepsilon - \varphi) - \ln r - i(\varphi + \varepsilon - \pi - \varphi) = 2(\pi - \varepsilon)i. \end{aligned}$$

Tatsächlich konvergiert dieses Ergebnis für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen das bekannte $2\pi i$.

Aber natürlich lässt sich auch $f(z) = 1/z$ über den Einheitskreis integrieren, ohne dass wir eine Parametrisierung und die Definition des Wegintegrals bemühen müssen. Auf Seite 5 unten haben wir ja schon allgemein festgestellt, dass

$$\int_{\partial U_r(z_0)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Die Voraussetzung war, dass f auf U holomorph ist, wobei $\overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset U$. Das Residuum kann an der Laurentreihe von f um z_0 abgelesen werden, wenn diese so entwickelt ist, dass sie in einer Umgebung von z_0 konvergiert. Mit dieser Formel wird die Rechnung in

$$\int_{\partial U_r(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 2\pi i$$

zu einer Trivialität. z^{-1} ist bereits um 0 entwickelt, der Koeffizient vor z^{-1} ist 1.

Mit der Homotopie-Invarianz bekommen wir: Ist γ irgendein positiver Weg mit 0 im Innern, so gilt $\int_{\gamma} dz/z = 2\pi i$. Oder wieder für allgemeines f und U : Seien $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein positiver Weg in U , so dass f genau eine Singularität im Innern von γ (nämlich in z_0) hat. Dann gilt bereits

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Für eventuell mehrere (oder gar keine) Singularität gilt als Verallgemeinerung der Residuensatz

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in \operatorname{Inn}(\gamma)} \operatorname{Res}(f, z_0),$$

wobei $\operatorname{Inn}(\gamma) \subset \mathbb{C}$ das Innere von γ bedeuten soll. Klarerweise ist das Residuum 0 für alle $z_0 \in U$ – dort verschwindet ja der Hauptteil der Laurentreihe.

Wir wollen uns von den positiven Wegen trennen und den Residuensatz für allgemeine geschlossene Wege formulieren. Dazu müssen wir messen, wie oft ein geschlossener Weg γ einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild} \gamma$ umrundet. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild} \gamma$ ist

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

wohldefiniert, und wir wissen, dass sich 1 ergibt, wenn γ eine positive Kreislinie um z_0 ist. Man kann zeigen, dass die Abbildung $\operatorname{ind}(\gamma, \cdot): \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild} \gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ tatsächlich ganzzahlig für jeden geschlossenen Weg γ ist und dass sie lokal konstant ist, d. h. konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild} \gamma$.

Wir nennen $\operatorname{ind}(\gamma, z_0)$ den Index (oder die Umlaufzahl) von γ um z_0 . Anschaulich misst er, wie oft γ den Punkt z_0 umläuft, und zwar unter Beachtung der Orientierung. Seien also nun U und f wie üblich und γ ein geschlossener Weg in U . Dann gilt der Residuensatz

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \operatorname{ind}(\gamma, z_0) \operatorname{Res}(f, z_0) = 2\pi i \sum_{z_0 \in \operatorname{Sing}(f)} \operatorname{ind}(\gamma, z_0) \operatorname{Res}(f, z_0),$$

wobei $\operatorname{Sing}(f) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Singularitäten von f bezeichne. Die Residuen müssen also nur für diejenigen Singularitäten berechnet werden, deren Index nicht verschwindet.

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

Dabei sind wir bei der wesentlichen Frage: Der Residuensatz hilft uns nur dann weiter, wenn die Residuen signifikant einfacher zu berechnen sind als das Wegintegral selbst. Dies ist aber in den meisten Fällen wahr, wie wir gleich sehen werden. Seien also z_0 eine nicht hebbare Singularität der holomorphen Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k$$

die auf $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ konvergente Laurentreihe von f um z_0 . Natürlich kennen wir diese Reihe zunächst nicht – sonst wäre ja nichts mehr zu tun.

Wir nehmen an, dass z_0 ein Pol m -ter Ordnung von f ist, d. h. $c_k = 0$ für alle $k < -m$. Wir multiplizieren mit $(z - z_0)^m$ und erhalten

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m}.$$

Rechts steht nun eine Potenzreihe. Wir differenzieren $(m - 1)$ -mal (also gar nicht für $m = 1$) nach z und führen dann $z \rightarrow z_0$ durch. Dies ergibt

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (k + m)(k + m - 1) \cdots (k + 2) (z - z_0)^{k+1} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (m - 1)! c_{-1}.$$

Damit folgt: Hat f in z_0 einen Pol m -ter Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z).$$

Wir betrachten noch zwei Spezialfälle dieser Formel: Ist nämlich $m = 1$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Sei zusätzlich $f = g/h$, so dass $g, h: U_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sind mit $g(z_0) \neq 0$. Dann ist $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$, weil ja z_0 ein Pol erster Ordnung ist, und es gilt mit de l'Hôpital

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) + (z - z_0)g'(z)}{h'(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Als Beispiel wollen wir das Residuum von $f(z) = 1/(z \sin z)$ in $z_0 = 0$ berechnen. Die Potenzreihe des Nenners beginnt mit z^2 , d. h. 0 ist ein Pol zweiter Ordnung von f . (Es gilt nämlich $z^2 f(z) \rightarrow 1$ für $z \rightarrow 0$.) Also rechnen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^5) - z + \frac{1}{2}z^3 + \mathcal{O}(z^5)}{z^2 + \mathcal{O}(z^4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}z + \mathcal{O}(z^3)}{1 + \mathcal{O}(z^2)} = 0. \end{aligned}$$

Das Residuum im Pol erster Ordnung bei $z_0 = \pi$ ist mit der speziellen Formel

$$\operatorname{Res}(f, \pi) = \operatorname{Res}\left(\frac{1/z}{\sin z}, \pi\right) = \frac{1/\pi}{\cos \pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

Für wesentliche Singularitäten ist die Sache komplizierter. Häufig sind die Funktionen aber vom Typ $h \circ g$, so dass g einen Pol in z_0 besitzt und h in einer Umgebung um z_0 holomorph mit nicht abbrechender Potenzreihe ist. Ein typisches Beispiel ist $f(z) = \exp(1/z)$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Das Residuum in 0 gewinnt man natürlich leicht mit der Potenzreihe, nämlich

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \implies \operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

Das Residuum von $f(z) = \exp(1/z^2)$ ist natürlich 0, und das gilt für jede holomorphe Funktion h statt \exp .

Um zu motivieren, wozu die Berechnung dieser komplexen Kurvenintegrale nützlich ist, berechnen wir einige reelle Integrale. Dazu sei nun $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und uns interessiert der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Um überhaupt entlang einer Kurve in \mathbb{C} integrieren zu können, müssen wir f holomorph fortsetzen, und zwar zumindest auf einen Streifen der Form $\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{C}$. Eine solche Fortsetzung \tilde{f} ließe sich in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ε entwickeln. Die naheliegende Forderung an unser f ist also reell-analytisch.

Schließlich gilt: Jede reell-analytische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann in eindeutiger Weise holomorph auf eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\} \subset U$ fortgesetzt werden. Sind nämlich $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ zwei solche Fortsetzungen, dann gilt ja $\tilde{f}_1|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \tilde{f}_2|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$, d. h. \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 stimmen auf einer Menge mit Häufungspunkt überein und sind damit identisch. Sehr häufig entstehen diese Fortsetzungen dadurch, dass man für $x \in \mathbb{R}$ in f komplexe Zahlen zulässt, so z. B. bei Polynomen, rationalen Funktionen, \sin , \cos , \sinh , \cosh , \arctan , usw. Die komplexen Potenzreihen erklären natürlich auch gewisse Konvergenzradien: Beispielsweise liefert

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

eine Potenzreihe für \arctan um 0, die nur Konvergenzradius 1 besitzt, obwohl die Reihe in $x = 1$ und $x = -1$ konvergiert (nämlich gegen $\pi/4$ und $-\pi/4$). Natürlich konvergiert die Reihe nicht für $i \in \mathbb{C}$, was daran liegt, dass \arctan in i eine Singularität besitzt.

Wir nehmen nun an, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} ohne endlich viele Punkte, d. h. $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ sei eine Fortsetzung von f . Wir bezeichnen mit z_1, \dots, z_k genau die Singularitäten mit positivem Imaginärteil und setzen $R = \max\{|z_1|, \dots, |z_k|\}$. Dann gilt für jedes $r > R$

$$\int_{\gamma_r} \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_j),$$

worin γ_r aus dem positiven Kreisbogen von r nach $-r$ ($\gamma_{r,1}$) und der Strecke auf der reellen Achse zurück ($\gamma_{r,2}$) besteht.

Wenn wir $r \rightarrow \infty$ gehen lassen, dann gilt

$$\int_{\gamma_{r,1}} \tilde{f}(z) dz \rightarrow 0 \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leftarrow \int_{\gamma_{r,2}} \tilde{f}(z) dz \rightarrow 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_j).$$

ZUSAMMENFASSUNG FUNKTIONENTHEORIE

Genaugenommen konvergiert das Kurvenintegral entlang $\gamma_{r,2}$ nur gegen den Cauchyschen Hauptwert von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Man muss also vorher sicherstellen, dass das zu berechnende Integral wirklich existiert.

Es gibt eine Klasse von Funktionen f , für die die Voraussetzung $\int_{\gamma_{r,1}} \tilde{f}(z) dz \rightarrow 0$ immer erfüllt ist. Dies sind rationale Funktionen (ohne reelle Nennernullstellen versteht sich), deren Nennergrad mindestens um zwei größer als der Zählergrad ist. Für diese gilt nämlich

$$\left| \int_{\gamma_{r,1}} \tilde{f}(z) dz \right| \leq \frac{M}{r^2} \pi r = \frac{\pi M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Darin ist πr die Länge des Integrationsweges. Es gibt noch viele andere Funktionenklassen auch über andere reelle Intervalle, für die man geeignete Integrationswege finden kann, um das Integral mit dem Residuensatz zu lösen.

Wir betrachten das ganz einfache Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx,$$

von dem wir elementar wissen, dass es π ist. Die Fortsetzung $\tilde{f}(z) = 1/(z^2 + 1)$ besitzt in der oberen Halbebene nur eine Singularität, nämlich einen Pol erster Ordnung in $z_1 = i$. Das Residuum ist

$$\text{Res}(\tilde{f}, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i}.$$

Da der Nennergrad von f tatsächlich um zwei größer als der Zählergrad ist, gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$